Решение задачи линейного программирования симплекс методом.  
Область допустимых решений - пустое множество

**Задача:**

Найти наибольшее значение функции

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| F | = |  | x1 | + | x2 |

при следующих ограничениях:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Знак системы |  | 3 | x1 | + | 5 | x2 | ≤ | 30 |
|  | 4 | x1 | - | 3 | x2 | ≤ | 12 |
|  |  | x1 | - | 3 | x2 | ≥ | 6 |

x1 ≥ 0    x2 ≥ 0    

**Решение:**

**1. Свободные члены системы должны быть неотрицательными.**

Данное условие выполнено.

**2. Каждое ограничение системы должно представлять собой уравнение.**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Знак системы |  | 3 | x1 | + | 5 | x2 | ≤ | 30 |
|  | 4 | x1 | - | 3 | x2 | ≤ | 12 |
|  |  | x1 | - | 3 | x2 | ≥ | 6 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Знак системы |  | 3 | x1 | + | 5 | x2 | + |  | S1 |  |  |  |  |  |  | = | 30 |
|  | 4 | x1 | - | 3 | x2 |  |  |  | + |  | S2 |  |  |  | = | 12 |
|  |  | x1 | - | 3 | x2 |  |  |  |  |  |  | - |  | S3 | = | 6 |

S1 ≥ 0, S2 ≥ 0, S3 ≥ 0.   Введенные переменные S1, S2, S3, называются балансовыми переменными.

**3. Нахождение начального базиса и значения функции F, которое соответствует найденному начальному базису.**

**Что такое базис?**  
Переменная называется базисной для данного уравнения, если она входит в данное уравнение с **коэффициентом один** и не входит в оставшиеся уравнения системы (при условии, что в правой части уравнения стоит неотрицательное число).  
Если в каждом уравнении присутствует базисная переменная, тогда говорят, что в системе присутствует базис.  
Переменные, которые не являются базисными, называются свободными.  
  
**В чем заключается идея симплекс метода?**  
Каждому базису соответствует единственное значение функции. Одно из них является наибольшим значением функции F.  
Мы будем переходить от одного базиса к другому.  
Следующий базис будем выбирать таким образом, чтобы получить значение функции F не меньше имеющегося.  
Очевидно, количество возможных базисов для любой задачи число не очень большое.  
Следовательно, рано или поздно, ответ будет получен.  
  
**Как осуществляется переход от одного базиса к другому?**  
Запись решения удобнее вести в виде таблиц. Каждая строка таблицы эквивалентна уравнению системы. Выделенная строка состоит из коэффициентов функции (см. таблицу ниже). Это позволяет не переписывать переменные каждый раз, что существенно экономит время.  
B выделенной строке выбираем наибольший положительный коэффициент (можно выбрать любой положительный).  
Это необходимо для того, чтобы получить значение функции F не меньше имеющегося.  
Выбран столбец.  
Для положительных коэффициентов выбранного столбца считаем отношение Θ и выбираем наименьшее значение.  
Это необходимо для того, чтобы после преобразования столбец свободных членов остался неотрицательным.  
Выбрана строка.  
Определен элемент, который будет базисным. Далее считаем.  
  
**В нашей системе есть базис?**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Знак системы |  | 3 | x1 | + | 5 | x2 | + |  | S1 |  |  |  |  |  |  | = | 30 |
|  | 4 | x1 | - | 3 | x2 |  |  |  | + |  | S2 |  |  |  | = | 12 |
|  |  | x1 | - | 3 | x2 |  |  |  |  |  |  | - |  | S3 | = | 6 |

Базиса нет, т.е. мы не можем начать решение.  
Придется его найти. Для этого решим вспомогательную задачу.  
Добавим искусственную переменную в то уравнение, где нет базисной переменной.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Знак системы |  | 3 | x1 | + | 5 | x2 | + |  | S1 |  |  |  |  |  |  |  |  |  | = | 30 |
|  | 4 | x1 | - | 3 | x2 |  |  |  | + |  | S2 |  |  |  |  |  |  | = | 12 |
|  |  | x1 | - | 3 | x2 |  |  |  |  |  |  | - |  | S3 | + |  | R1 | = | 6 |

R1 ≥ 0.   Введенная переменная R1, называется искусственной переменной.

Введем в рассмотрение функцию W и будем искать ее наименьшее значение.

Алгоритм нахождения наименьшего значения функции W имеет только одно отличие от алгоритма, рассмотренного выше.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| W | = |  | R1 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | W | = | 6 | - | x1 | + | 3 | x2 | + | S3 | |

Приравниваем свободные переменные нулю. Устно находим значения базисных переменных. (см. систему)  
Функция W выражена через свободные переменные. Поэтому значение функции W, для данного базиса, можно найти мгновенно.

|  |  |
| --- | --- |
| x1 = 0   x2 = 0   S3 = 0   S1 = 30   S2 = 12   R1 = 6 | => W = 6 |

Шаг №1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x1 | x2 | S1 | S2 | S3 | R1 | св. член | Θ |
| 3 | 5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 30 | 30 : 3 = 10 |
| 4 | -3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 12 | 12 : 4 = 3 |
| 1 | -3 | 0 | 0 | -1 | 1 | 6 | 6 : 1 = 6 |
| -1 | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | W - 6 |  |
| 3 | 5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 30 |  |
| 1 | -3/4 | 0 | 1/4 | 0 | 0 | 3 |  |
| 1 | -3 | 0 | 0 | -1 | 1 | 6 |  |
| -1 | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | W - 6 |  |
| 0 | 29/4 | 1 | -3/4 | 0 | 0 | 21 |  |
| 1 | -3/4 | 0 | 1/4 | 0 | 0 | 3 |  |
| 0 | -9/4 | 0 | -1/4 | -1 | 1 | 3 |  |
| 0 | 9/4 | 0 | 1/4 | 1 | 0 | W - 3 |  |

Приравниваем свободные переменные нулю. Устно находим значения базисных переменных. (см. таблицу)  
Функция W выражена через свободные переменные. Поэтому значение функции W, для данного базиса, можно найти мгновенно. (см. выделенную строку таблицы)

|  |  |
| --- | --- |
| x2 = 0   S2 = 0   S3 = 0   x1 = 3   S1 = 21   R1 = 3 | => W - 3 = 0   => W = 3 |

Среди коэффициентов выделенной строки нет отрицательных. Следовательно, найдено наименьшее значение функции W.  
Но в базисе по-прежнему содержатся искусственные переменные.  
Следовательно, область допустимых решений исходной задачи - пустое множество.

**Ответ:**

Область допустимых решений задачи - пустое множество